Scientia in educatione, 8(2), 2017
p. 21–38
ISSN 1804-7106

Volba heuristických strategií v závislosti na věku

Petr Eisenmann, Jiří Přibyl, Jarmila Novotná,
Jiří Břehovský, Jiří Cihlář

Abstrakt

Příspěvek popisuje experiment, který byl součástí dlouhodobého výzkumu *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi.* Experiment byl proveden na vzorku celkem 584 respondentů ve věku 11–17 let a mapuje rozložení četností voleb heuristických strategií matematických úloh u různých věkových skupin žáků. Žákům 6. a 8. ročníku základní školy, I. a III. ročníku střední školy byly předloženy tři úlohy, které je možné efektivně řešit pomocí heuristických strategií. Kromě úspěšnosti řešení úloh byla věnována pozornost také způsobu jejich řešení. Výsledkem experimentu je zjištění, že existují heuristické strategie, které žáci použili při řešení úloh i přesto, že s nimi ve výuce nebyli seznámeni. U některých strategií se jejich výskyt nemění v závislosti na věku.

Klíčová slova: heuristická strategie, systematické experimentování, pokus – ověření – korekce, zavedení pomocného prvku, cesta zpět.

Choice of Heuristic Strategies with Respect to Age

Abstract

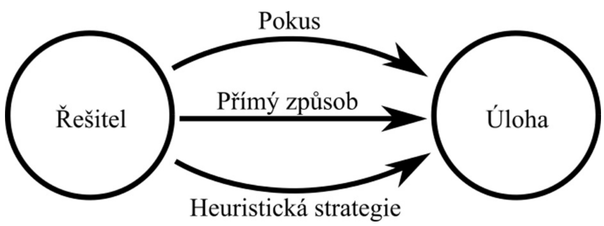
The paper reports on an experiment that was a part of a longitudinal research project entitled *Development of culture of problem solving in mathematics carried out in Czech schools.* The experiment involved 584 respondents aged 11–17. The experiment maps the distribution in pupils' selection of heuristic strategies towards solving mathematical problems in case of different age groups of pupils. Pupils from the 6th and 8th grades of lower secondary and the Ist and IIIrd grade of upper secondary school were assigned three problems that could be solved effectively using heuristic strategies. Besides the success rate in solving the problems, attention was also paid to the manner in which the pupils managed to solve them. The results of the experiment show that the pupils tended to use some particular heuristic strategies despite the fact that they had not come across them in lessons. The occurrence of some of these strategies is independent of the age of pupils.

Key words: heuristic strategy, systematic experimentation, guess – check – revise, introduction of an auxiliary element, working backwards.

Příspěvek je jedním z výstupů vědeckého projektu GA ČR P407/12/1939 *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi*. Výzkum byl zaměřen na to, jak je tato kultura ovlivněna rozvíjením schopnosti žáků řešit úlohy heuristickými strategiemi. Jeho výsledky jsou souhrnně uvedeny v publikaci autorského kolektivu vedeného Eisenmannem (2015).

1 Řešení úloh

Řešení úlohy chápeme jako kognitivní proces, který lze realizovat jedním ze tří způsobů v závislosti na angažovanosti, schopnostech a dovednostech řešitele (viz obr. 1).



Obr. 1: Způsoby řešení úloh

První způsob označujeme jako *pokus*. Jedná se o nejprimitivnější způsob vypořádání se s úlohou, který předpokládá pouze vnější motivaci řešitele. Ten plní pouze cíl „vyřešit úlohu“, a to většinou pouze jednou, bez vnitřní zpětné vazby o správnosti řešení.

Druhý způsob označujeme jako *přímý způsob* a je založen na aplikaci naučené znalosti nebo algoritmu. Řešitel zná požadovaný proces řešení a navíc je s to si uvědomit, že ho má použít, a aplikuje ho.

Třetí způsob nazýváme řešení *užitím heuristické strategie*. Řešitel nemá požadované znalosti nebo je neumí použít, nemůže tedy úlohu řešit přímým způsobem. Je však vnitřně motivován k řešení úlohy. Heuristická strategie mu umožní úlohu vyřešit. Heuristické strategie jsou zde uvažovány ve smyslu, v němž je používají Pólya (2004) a Schoenfeld (1992).

Některé z heuristických strategií jsou relativně jednoduché a žáci je dokonce mohou používat k řešení úloh spontánně, pouze na základě svých předchozích zkušeností, aniž by jim byly předtím ve výuce explicite předkládány k osvojení. Jiné je naopak poměrně obtížné si osvojit a aktivně používat k řešení úloh.

Jak je ukázáno dále v kapitole 2.3, heuristické strategie se při řešení úloh v českých učebnicích matematiky vyskytují ojediněle. Četné diskuse s učiteli matematiky různých stupňů škol potvrzují, že ani v praxi se ve výuce při řešení úloh příliš nepoužívají.

Z tohoto úhlu pohledu by tedy mohlo být užitečné popsat, jaké je rozložení spontánní volby heuristických strategií při řešení matematických úloh u různých věkových skupin žáků. Žákům 6. a 8. ročníku základní školy a 1. a 3. ročníku střední školy byly proto předloženy tři úlohy, které se dají efektivně řešit pomocí vybraných heuristických strategií. Za efektivní (účinný) způsob řešení úlohy považujeme takový, kde výsledek odpovídá vložené práci či dokonce množství vložené práce při řešení heuristickou strategií je menší než v případě přímého způsobu řešení.

Vybrány byly s ohledem na naše předchozí výzkumy (Eisenmann et al., 2015; Břehovský et al., 2013) následující čtyři strategie: *Systematické experimentování*, *Pokus – ověření – korekce*, *Cesta zpět* a *Zavedení pomocného prvku* (tato strategie pouze u geometrických úloh). Výběr strategií byl proveden na základě jejich vlastností, které jsme popsali v (Přibyl & Eisenmann, 2014). Lze konstatovat, že konkrétně *množství nutných znalostí, množství nutných zkušeností k jejich úspěšnému použití* a tzv. *riziko nesprávného použití*, je u těchto čtyř strategií oproti ostatním strategiím nízké. V tomto smyslu vnímáme vybrané strategie jako relativně jednoduché.

2 Teoretické pozadí

2.1 Diskutované heuristické strategie

Dále uvedené heuristické strategie jsou podrobně popsány např. v následujících publikacích (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2015; Přibyl & Ondrušová, 2014; Eisenmann & Přibyl, 2013; Novotná, Eisenmann & Přibyl, 2015). Zde je pouze stručně pro účely tohoto příspěvku charakterizujeme a v kapitole 4.1 je ilustrujeme při řešení testových úloh.

Následující dvě popisované strategie řadíme mezi strategie experimentální, neboť v jejich pozadí je vždy provedení konkrétního experimentu. Pohled na tyto dvě strategie není jednotný. Ve svých počátcích Pólya (2004) tento způsob řešení nepovažuje za strategii, byť upozorňuje, že pro řešení úloh je důležité provádět pokusy. V Pólya (1981) už se však můžeme setkat s tím, že tento způsob řešení považuje za heuristickou strategii, ale mezi těmito dále specifikovanými strategiemi nerozlišuje a souhrnně je nazývá strategie pokus – omyl (*trial and error*). Stejně tak Schoenfeld (1982) hovoří o strategii pokus – omyl a tento přístup k řešení úloh zakládá na odhadu podloženém intuicí. Hayes (1981) jde dál a mezi následujícími dvěma strategiemi začíná rozlišovat, a to právě způsobem, jaký jsme použili i my.

Systematické experimentování (SE): Principem této strategie je proces postupného přibližování se k výsledku. Na počátku provede řešitel volbu odhadu výsledku (buď prvního možného, nebo nějakého bližšího k řešení) a dále postupuje systematicky. Po každém provedeném experimentu řešitel pouze ověří, zda získal požadovaný výsledek či nikoliv. Pokud ne, pokračuje dál, přičemž vstupní hodnota do dalšího experimentu je dána pořadím (nikoliv volbou řešitele). Tato strategie se opírá o fakt, že řešitel si je vědom skutečnosti, že hledaný výsledek leží v řetězci hodnot provázaných systémem a pokud projde tento řetězec, potom výsledek najde. Velmi často se jako prostředku řešení užívá výpočetní technika.

Pokus – ověření – korekce (POK): Principem této strategie je proces přibližování se výsledku úlohy, kdy řešitel v prvním kroku provede náhodnou volbu. Ve druhém kroku ověří, zda jeho volba byla správná. Pokud ne, pokusí se zjistit, jak moc se zmýlil. Konečně ve třetím kroku provede korekci, tedy opravu, která mu vygeneruje nový pokus. Celý proces začíná nanovo. Cílem je dobrat se řízenými iteracemi po konečném počtu kroků k cíli.

Cesta zpět (CZ): Princip této strategie spadá mezi již dlouho známé postupy řešení úloh. Jak uvádí celá řada autorů (Pólya, 2004; Hintikka & Remes, 1974), počátky této „strategie“ lze vysledovat až k Pappovi z Alexandrie, přičemž hovoří o Pappově analytické metodě (*method of analysis*), kterou prováděl oběma směry a na kterou navazovala syntéza (*method of synthesis*). V matematice se jedná o často užívanou strategii, kdy známe koncový stav, známe počáteční stav a snažíme se jít od konce k počátku. Řešení úlohy je potom založeno na „otočení“ nalezeného postupu – vhodným příkladem jsou úlohy z konstrukční geometrie.

V těchto úlohách vycházíme z předpokladu, že řešení dané úlohy existuje a má požadované vlastnosti. Zpětným krokováním (rozborem) si uvědomujeme, který krok bezprostředně předcházel danému a v tomto duchu postupujeme až do situace, která je počáteční situací úlohy. Obrácením tohoto postupu (rozboru) získáváme řešení úlohy. Specifickou variantou úloh řešených pomocí CZ jsou slovní úlohy, ve kterých se s úspěchem využívají inverzní operace k operacím uvedeným v zadání úlohy.

Zavedení pomocného prvku (ZPP): Základní idea této strategie spočívá v tom, že zavedením pomocného prvku se řešení pro řešitele stane snadněji dosažitelné. Pólya (2004) vnímá námi popisovanou strategii ZPP v širších souvislostech a rozlišuje dva základní typy pomocných prvků. Prvním typem je pomocný prvek jako takový (*auxiliary element*) a druhým pak je pomocná úloha (*auxiliary problem*). Smyslem pomocné úlohy je umožnit řešiteli buď získat vhled do původní úlohy, nebo vyřešit úlohu jako takovou. Na rozdíl od tohoto úhlu pohledu vymezujeme pomocný prvek pouze jako objekt, který se na první pohled v úloze nevyskytuje, a my jej do úlohy vpravíme s nadějí, že nám usnadní přístup k řešení. V některých případech je existence tohoto prvku indukována objekty již v úloze se vyskytujícími a v tomto případě je možno hovořit o skrytém prvku. U geometrických úloh se obvykle jedná o přímku, úsečku, bod či obrazec, v případě slovních úloh o číslo či nějakou funkci, u rovnic zase zavádíme pomocný prvek pomocí substituce.

Zatímco Pólya (2004) vnímá zavedení pomocného prvku jako specifický způsob řešení problému (v obecnosti), Schoenfeld (1982) již vnímá tento proces jako samostatnou heuristickou strategii a hovoří o strategii zavádění pomocného prvku (*introducing auxiliary elements*).

Jak již bylo řečeno výše, my se v našem výzkumu zabýváme spontánní volbou této strategie pouze u geometrických úloh. Zde je totiž volba pomocného prvku na rozdíl od slovních úloh většinou relativně jednoduchá.

2.2 Relevantní výzkumy

Uveďme nyní přehledně výsledky pěti relevantních výzkumů zabývajících se spontánní volbou heuristických strategií žáky.

Jiang, Hwang a Cai (2014) popisují výsledky své studie, v níž zkoumali použití řešitelských strategií žáky ve věku 10–11 let při řešení úloh o pohybu. Celkem se studie zúčastnilo 361 čínských a 345 singapurských žáků z různých typů škol. Pro naše účely je zajímavé, že jednou z relativně často volených strategií byla strategie námi označovaná jako POK. Žáci byli při jejím použití většinou při řešení úlohy úspěšní.

Ho a Lowrie (2014) popisují výsledky svého výzkumu, kterého se zúčastnilo 607 singapurských žáků ve věku 11–12 let. Žákům byly předloženy dvě slovní úlohy a byly analyzovány způsoby jejich řešení. Z našeho pohledu je zajímavé, že celkem třetina žáků použila grafický způsob řešení, jehož jedním ze zástupců je strategie námi označovaná jako ZPP.

Iliada, van den Heuvel-Panhuizen a Kolovou (2009) popisují výsledky svého výzkumu, kterého se zúčastnilo 152 holandských žáků ve věku 9–10 let. Žákům byly předloženy tři slovní úlohy a byly analyzovány způsoby jejich řešení. Mezi strategiemi použitými při řešení těchto úloh se objevily mimo jiné i strategie, námi označované jako SE a POK. Žáci, kteří tyto strategie zvolili, byli většinou úspěšní. Celkově ale uplatnilo heuristické strategie při řešení úloh jen málo žáků (Iliada, van den Heuvel-Panhuizen & Kolovou, 2009: s. 611).

Van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou a Robitzsch (2013) zkoumali roli dynamických online her na žáky z hlediska jejich schopnosti řešit úlohy. Žáci řešili slovní úlohy, které se zabývají určováním množství. Experimentu se zúčastnilo celkem 253 holandských žáků ve věku 10–12 let. Žáci své úlohy řešili v on-line režimu, speciální software zaznamenával mimo jiné také strategie použité při řešení. Nejpoužívanější strategií bylo POK, občas se vyskytlo i SE.

Ishida (2002) popisuje svou studii, která se zaměřovala na schopnost žáků nalézt nejlepší možnou strategii řešení úlohy. Experimentu se zúčastnilo 12 japonských žáků ve věku 11–12 let. Žáci řešili dvě úlohy, každou alespoň dvěma způsoby. Poté sami vysvětlovali, který z použitých způsobů je k řešení úlohy vhodnější. První úloha je na společnou práci, druhá úloha ukládá určit počet trojúhelníčků, pomocí nichž se předepsaným způsobem sestaví daný obrazec. V prvním případě žáci označili jako nejefektivnější strategii námi nazývanou POK, ve druhém vyzdvihli grafický způsob řešení, jehož jedním zástupcem je strategie námi nazývaná ZPP.

Kromě dvou výše zmíněných výzkumů s holandskými žáky nejsou autorům známy žádné relevantní výzkumy z oblasti spontánního výskytu heuristických strategií, které by probíhaly v evropských zemích kulturně a historicky spjatých s ČR.

2.3 Heuristické strategie v českých učebnicích

V rámci experimentu jsme provedli také analýzu vybraných českých sad učebnic pro základní a střední školy. Zkoumali jsme, zda se v řešených úlohách uvedených v těchto učebnicích vyskytují výše uvedené čtyři heuristické strategie. Při identifikaci těchto řešených úloh jsme nehledali názvy strategií, ale zaměřili jsme se na podstatu řešení dané úlohy. V tabulkách 1 a 2 uvádíme pouze ta témata, kde se řešené úlohy pomocí zkoumaných strategií vyskytly. Sloupec *Počet úloh* udává počet všech vyřešených úloh daného tématu a následující sloupce udávají četnosti výskytu řešených úloh pomocí zkoumaných heuristických strategií.

Tab. 1: Použití heuristických strategií v řešených úlohách učebnic ZŠ

Sada učebnic	Téma	Počet úloh	Použité heuristické strategie			
			SE	POK	CZ	ZPP
(Molnár et al., 1998–2001)	Trojúhelník	1			1	
	Množina bodů dané vlastnosti	5	1			
	Konstrukční úlohy	7			2	
	Podobnost	5				1
	Finanční matematika	9	2			
(Půlpán et al., 2007–2010)	Prostor a jeho zobrazení	18				1
	Trojúhelník	8			1	1
	Shodnost	8			3	
	Čtyřúhelníky	13			2	2
	Kružnice a kruh	8			1	
	Konstrukční úlohy	15			8	
	Podobnost	13				1

Tab. 2: Použití heuristických strategií v řešených úlohách učebnic SŠ

Sada učebnic	Téma	Počet úloh	Použité heuristické strategie			
			SE	POK	CZ	ZPP
(Odvárko et al., 1985–1988)	Logaritmické a exponenciální rovnice	4				1
	Goniometrické rovnice	4				2
	Geometrické posloupnosti	4	1			
	Nekonečná řada	4	2			
	Shodná zobrazení v rovině	2			1	
	Stejnolehlost	2			2	
(Boček et al., 1993–1999)	Rovnice vyšších stupňů	13		1		8
	Goniometrické rovnice	5				1
	Integrální počet	23				7
	Metrické vlastnosti	16				3
	Geometrické útvary v rovině	9				3
	Množina bodů dané vlastnosti	19	1		3	1
	Zobrazení v rovině	29			10	1

3 Výzkumné otázky a hypotézy

Na začátku jsme si položili tyto výzkumné otázky:

1. V jaké míře použijí žáci při řešení předložených úloh vytipované heuristické strategie?
2. Jak závisí volba vytipovaných heuristických strategií na věku žáků?
3. Jak jsou žáci při použití heuristických strategií úspěšní?
4. Jak se v závislosti na věku mění četnost případů, kdy žáci vůbec nezačnou úlohu řešit?

Na základě zkušeností z dosavadních experimentů popsaných především v (Eisenmann et al., 2015) jsme formulovali před začátkem experimentu následující výzkumné hypotézy:

H1: Při řešení předloženého souboru úloh se objeví všechny čtyři vytipované heuristické strategie.

H2: Četnost případů, kdy žáci vůbec nezačnou úlohu řešit, bude s narůstajícím věkem řešitelů klesat.

Kromě těchto dvou hypotéz vztahujících se k položeným výzkumným otázkám jsme formulovali i přirozenou hypotézu o úspěšnosti řešení úloh jako takových:

H3: Četnost úspěšně vyřešených úloh (jakýmkoli způsobem) bude s narůstajícím věkem řešitelů vzrůstat.

V pozadí hypotéz H2 a H3 je očekávání, že pokud se žák v rámci vzdělávacího procesu delší dobu (z hlediska školní docházky) věnuje řešení úloh, pak dochází nejen k tomu, že nebude řešení úloh vzdávat v takové míře, jak když se s úlohami setkává nově, ale že dochází i k přirozenému nárůstu úspěšnosti. Poznamenejme, že podstata testových úloh je vždy nezávislá na věku, avšak z důvodu zachování stejné početní náročnosti jsme vytvořili pro jednotlivé věkové kategorie různé varianty zadání u dvou testových úloh.

4 Experiment

Na jaře 2013 byl proveden předvýzkum vždy ve dvou třídách každé věkové kategorie: 6. a 8. ročník základní školy a I. a III. ročník střední školy. Jednalo se vždy o cca 45 žáků ze tříd, které byly z hlediska školního výkonu průměrné. Tento předvýzkum nám umožnil z celkového počtu 16 testovaných úloh vytvořit soubor tří následujících úloh, které se nejlépe osvědčily z hlediska záměru výzkumu. Zadání se u dvou z nich v některých parametrech z důvodu zachování přibližně stejné početní obtížnosti liší podle věku zkoumaných žáků. U každé úlohy uvádíme tu či ty heuristické strategie, které jsou kromě přímého způsobu řešení, pokud jej tedy žáci jsou schopni použít, efektivním způsobem jejího řešení.

4.1 Zadání a řešení testových úloh

Úloha Neznámé číslo

Polovina neznámého celého čísla zmenšená o polovinu je číslo 32. O jaké číslo se jedná? (verze 6. roč.)

Třetina neznámého celého čísla zmenšená o polovinu je číslo 32. O jaké číslo se jedná? (verze 8. roč.)

Třetina neznámého celého čísla zmenšená o pětinu je číslo 32. O jaké číslo se jedná? (verze SŠ)

Heuristické strategie řešení: CZ, POK.

Autorská řešení úlohy (verze SŠ)

1. přímý způsob

Označme n hledané číslo. Přímý způsob řešení spočívá v sestavení příslušné rovnice.

$$\frac{1}{3}n - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}n\right) = 32$$

Řešením této rovnice získáme:

$$n = 120.$$

2. heuristická strategie – CZ

Jestliže známe výsledné číslo a hledáme původní číslo, musíme provádět inverzní operace k operacím v zadání, a to v obráceném pořadí.

1. Odečtení pětiny daného čísla od sebe samého je ekvivalentní s vynásobením daného čísla $\frac{4}{5}$; inverzní operací je vynásobení „výsledku“ $\frac{5}{4}$.
2. Inverzní operací k násobení $\frac{1}{3}$ je násobení 3.

Následující zápis ukazuje provedení postupu:

$$\left(\frac{5}{4} \cdot 32\right) \cdot 3 = 120.$$

3. heuristická strategie – POK

Provádějme postupně jednotlivé odhady čísel s ideou najít hledané (fáze pokus). Po volbě odhadu provedeme požadované operace a ověříme, zda jsme získali výsledek uvedený v úloze (fáze ověření). Pokud ne, je zapotřebí provést opravu (fáze korekce) a dané číslo buď nahradit větším či menším. Tím se vygeneruje další pokus.

Pokus č. 1 – volba: 90

$$\frac{1}{3} \cdot 90 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} \cdot 90\right) = 24$$

Vyšlo nám 24, ale požadováno je 32. Je potřeba odhadované číslo zvětšit.

Pokus č. 2 – volba: 150

$$\frac{1}{3} \cdot 150 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} \cdot 150\right) = 40$$

Vyšlo nám 40, ale požadováno je 32. Je potřeba odhadované číslo zmenšit.

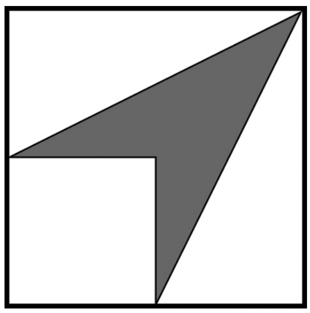
Pokus č. 3 – volba: 120

$$\frac{1}{3} \cdot 120 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} \cdot 120\right) = 32$$

Vyšlo nám 32, což je požadováno. Na třetí pokus jsme našli hledané číslo.

Úloha Šipka

Je dán čtverec o straně délky 8 cm. Určete obsah vybarveného obrazce – šipky. (Konce šipky jsou ve středech stran, viz obr. 2.)



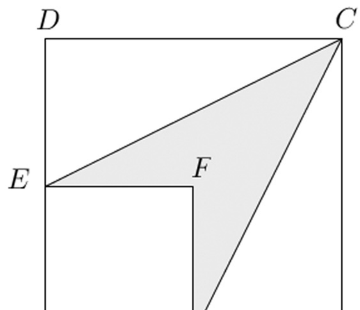
Obr. 2: Šipka

Zadání převzato z (Maláč & Kurfürst, 1981).

Heuristické strategie řešení: ZPP.

Autorská řešení úlohy

Pro snadnou orientaci zavedeme označení vrcholů jako na obrázku 3.

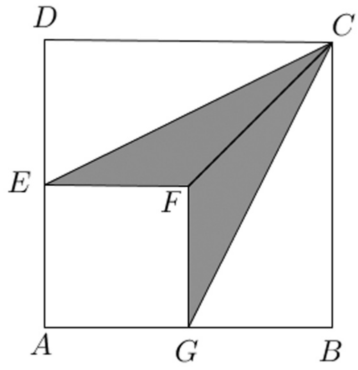


Obr. 3: Označení bodů v úloze Šipka

1. přímý způsob

Vypočteme obsahy trojúhelníků BCG a DCE a čtverce $AGFE$ a odečteme je od obsahu čtverce $ABCD$.

$$S_{\text{šipka}} = S_{ABCD} - S_{BCG} - S_{DCE} - S_{AGFE}$$
$$S_{\text{šipka}} = 64 - 16 - 16 - 16$$
$$S_{\text{šipka}} = 16$$



Obr. 4: Zavedení pomocného prvku úsečky FC

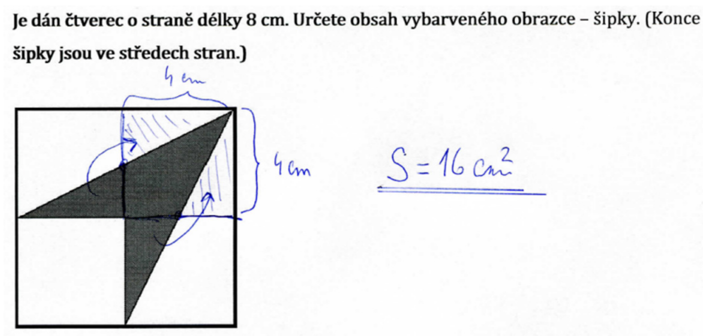
2. heuristická strategie – ZPP

Využijeme obrázek 4. Pomocným prvkem je úsečka FC. Šipka se skládá ze dvou shodných trojúhelníků FCE a FCG, přičemž oba trojúhelníky mají základnu i výšku rovnou 4 cm.

$$S_{\text{šipka}} = 2 \cdot S_{FCE}$$
$$S_{\text{šipka}} = 2 \cdot \tfrac{4 \cdot 4}{2}$$
$$S_{\text{šipka}} = 16$$

Žákovské řešení úlohy

Na obrázku 5 uvádíme jedno velmi pěkné žákovské řešení úlohy, které je také založeno na heuristické strategii ZPP.



Obr. 5: Žákovské řešení úlohy pomocí heuristické strategie ZPP

Úloha Součin

Po sobě následující lichá čísla jsou 1, 3, 5, 7, 9, … Určete dvě po sobě následující lichá čísla tak, aby jejich vynásobením vzniklo číslo 255. (verze 6. roč.)

Po sobě následující lichá čísla jsou 1, 3, 5, 7, 9, … Určete dvě po sobě následující lichá čísla tak, aby jejich vynásobením vzniklo číslo 1 023. (verze 8. roč. a SŠ)

Zadání převzato z (Cihlář & Zelenka, 1998).

Heuristické strategie řešení: SE, POK.

Autorská řešení úlohy (verze SŠ)

1. přímý způsob

Označme si a, b hledaná dvě po sobě jdoucí lichá čísla. Nechť n je přirozené číslo větší než nula. Vyjádřeme si hledaná čísla následovně:

$$\begin{aligned} a &= 2n - 1 \\ b &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= 1\,023 \\
(2n-1)(2n+1) &= 1\,023 \\
4n^2 - 1 &= 1023 \\
n^2 &= 256 \\
n &= 16
\end{aligned}$$

Situaci, kdy $n = -16$ nepřipouštíme, protože dle předpokladu je n přirozené číslo. Získáváme hledaná čísla:

$$\begin{aligned}
a &= 2 \cdot 16 - 1 = 31 \\
b &= 2 \cdot 16 + 1 = 33
\end{aligned}$$

2. heuristická strategie – SE

Její podstatou je postupné testování možností. Jak je uvedeno v kapitole 2.1, vhodným pomocníkem je výpočetní technika, v našem případě reprezentovaná počítačem a tabulkovým procesorem MS Excel. Obrázek 6 ukazuje řešení, přičemž hledaná čísla jsou tučně zvýrazněna.

	A	B	C	D
1	První číslo	Druhé číslo	Součin	
2	1	3	3	
3	3	5	15	
4	5	7	35	
5	7	9	63	
6	9	11	99	
7	11	13	143	
8	13	15	195	
9	15	17	255	
10	17	19	323	
11	19	21	399	
12	21	23	483	
13	23	25	575	
14	25	27	675	
15	27	29	783	
16	29	31	899	
17	**31**	**33**	**1023**	
18	33	35	1155	
19	35	37	1295	
20	37	39	1443	
21				

Obr. 6: Řešení úlohy Součin pomocí tabulkového procesoru MS Excel

3. heuristická strategie – POK

Provádějme postupně jednotlivé odhady čísel s ideou najít hledanou dvojici (fáze pokus). Po volbě odhadu provedeme jejich vynásobení a ověříme, zda jsme získali výsledek uvedený v úloze (fáze ověření). Pokud ne, je zapotřebí provést opravu (fáze korekce) a daná čísla buď nahradit většími či menšími. Tím se vygeneruje další pokus.

Pokus č. 1 – volba: 21 a 23

$$21 \cdot 23 = 483$$

Vyšlo nám 483, ale požadováno je 1 023. Je tedy zapotřebí obě čísla zvětšit.

Pokus č. 2 – 41 a 43

$$41 \cdot 43 = 1\,763$$

Vyšlo nám 1 763, ale požadováno je 1 023. Je tedy zapotřebí obě čísla zmenšit.

Pokus č. 3 – 33 a 35

$$33 \cdot 35 = 1\,155$$

Vyšlo nám 1 155, ale požadováno je 1 023. Je tedy zapotřebí obě čísla zmenšit.

Pokus č. 4 – 31 a 33

$$31 \cdot 33 = 1023$$

Vyšlo nám 1 023, což je požadováno. Na čtvrtý pokus jsme našli požadovanou dvojici čísel.

4.2 Popis testování

Na podzim roku 2013 byl proveden samotný experiment. Toho se zúčastnilo celkem 584 žáků ve čtyřech věkových kategoriích: 145 žáků 6. ročníku ZŠ, 129 žáků 8. ročníku ZŠ, 200 žáků z I. ročníku SŠ a 110 žáků III. ročníku SŠ. Žáci navštěvovali běžné třídy základních a středních škol Ústeckého kraje a okolí Prahy. V případě žáků 6. a 8. ročníku základních škol se vždy jednalo o žáky stejné školy. Do výzkumu nebyly zahrnuty specializované třídy (např. třídy s rozšířenou výukou matematiky nebo jazyků). V případě středních škol se jednalo v každé věkové kategorii o střední školy všech typů: gymnázia, odborné školy s maturitou i obory středních škol bez maturity. Školy byly vybrány tak, aby poměr respondentů výzkumu přibližně odpovídal zastoupení žáků těchto typů škol v České republice. Tabulka 3 ukazuje počty respondentů v jednotlivých typech středních škol. Jednalo se o vzorek na základě dostupnosti.

Tab. 3: Počty respondentů jednotlivých typů středních škol

	Gymnázia	Střední odborné školy		Celkem
		s maturitou	bez maturity	
1. ročník	64	82	54	200
3. ročník	36	39	35	110

V rámci výzkumu jsme nerozlišovali pohlaví žáků.

Úlohy byly žákům zadány v hodině matematiky. Každý žák dostal jeden list papíru, na němž bylo zadání všech tří úloh. Pod něj pak žáci přímo na tento papír úlohu řešili. Každý učitel dostal tyto pokyny: učitel nesmí radit ani vysvětlovat zadání; používání mobilů, kalkulaček a jakýchkoliv materiálů (tabulky, sbírky vzorců) je zakázáno; žáci musí napsat postup řešení či úvahy vedoucí k výsledku, ne jen samotný výsledek; žáci musí napsat slovní odpověď či dvakrát podtrhnout výsledek; učitel nechť posoudí, zda se mají žáci podepsat či nikoli. Je však zapotřebí dosáhnout co největší angažovanosti žáků; žáci mají na řešení nejvýše 40 minut.

U každé úlohy jsme sledovali výskyt těchto jevů:

- „přímý způsob“ (žák k řešení úlohy použil znalost nebo naučený algoritmus, a tedy nepoužil žádnou heuristickou strategii);
- „použitá heuristická strategie“;
- „úloha je úspěšně vyřešena“ (žák správným postupem vyřešil úlohu, napsal správnou slovní odpověď či jasně vyznačil výsledek);
- „prázdno“ (žák úlohu neřešil a odevzdal prázdný papír).

5 Výsledky a diskuse

Následující tabulky 4, 5 a 6 uvádějí u každé úlohy relativní četnosti přímého způsobu řešení, řešení pomocí očekávaných heuristických strategií (viz podkapitola 4.1) a situace, kdy žák nezačal úlohu vůbec řešit. Čísla v posledním řádku pak vždy souhrnně udávají relativní četnosti všech ostatních reakcí, které mezi tyto tři jevy nespadají. Součty hodnot v jednotlivých sloupcích jsou vždy rovny 100 %.

Tab. 4: Úloha Neznámé číslo (v %)

	6. ročník $N = 145$	8. ročník $N = 129$	I. ročník $N = 200$	III. ročník $N = 110$
přímý způsob	7,6	2,3	27,5	20,9
heur. strategie CZ	77,2	76,0	42,0	61,8
heur. strategie POK	0,0	0,0	0,0	0,0
prázdno	7,6	9,3	16,5	16,4
ostatní	7,6	12,4	14,0	0,9

Tab. 5: Úloha Šipka (v %)

	6. ročník $N = 145$	8. ročník $N = 129$	I. ročník $N = 200$	III. ročník $N = 110$
přímý způsob	26,2	28,7	50,5	42,7
heur. strategie ZPP	20,7	25,6	19,5	20,9
prázdno	27,6	33,3	23,5	31,8
ostatní	25,5	12,4	6,5	4,6

Tab. 6: Úloha Součin (v %)

	6. ročník $N = 145$	8. ročník $N = 129$	I. ročník $N = 200$	III. ročník $N = 110$
přímý způsob	0,0	0,0	5,0	0,9
heur. strategie POK	51,7	57,4	67,0	69,1
heur. strategie SE	7,6	3,1	1,5	1,8
prázdno	26,9	27,9	29,0	26,4
ostatní	13,8	11,6	2,5	2,7

Zodpovězme nyní postupně všechny čtyři položené výzkumné otázky.

První výzkumná otázka se ptá na výskyt uvažovaných heuristických strategií při řešení úloh žáky. Hypotéza H1 říká: Při řešení předloženého souboru úloh se objeví všechny čtyři vytipované heuristické strategie. Z tabulek 4–6 je zřejmé, že hypotéza H1 se potvrdila.

Ve sledovaných zahraničních výzkumech se nejčastěji objevila strategie POK, dále pak ZPP a SE. Častější použití těchto strategií se projevilo i v našem výzkumu, a to ve všech věkových kategoriích. Spontánně byla navíc použita i strategie CZ, která se v zahraničních výzkumech, které jsme porovnávali s našimi výsledky, nevyskytla. Může to být dáno tím, že tato strategie je často zařazována do výuky matematiky v České republice už na 1. stupni základní školy.

Druhá výzkumná otázka se zabývá rozložením četnosti užití jednotlivých strategií v závislosti na věku žáků. Lze konstatovat, že u strategií POK a ZPP se výrazně nemění četnost jejich použití v závislosti na věku (viz tab. 5 a 6). O rozložení četnosti užití strategie SE se nevyjadřujeme, protože byla žáky použita pouze marginálně (viz tab. 6).

Nejčastěji spontánně volenou strategií je CZ (viz tab. 4). V prvním a třetím ročníku SŠ je možné úbytek četnosti použití této strategie vysvětlit do jisté míry nástupem řešení pomocí rovnic. Ty použila v osmém ročníku ZŠ 2 % žáků, zatímco v prvním, resp. třetím ročníku SŠ 27 %, resp. 21 % žáků.

Třetí výzkumná otázka se ptá na úspěšnost použití jednotlivých heuristických strategií. Výsledky jsou vidět v tabulce 7, která udává úspěšnost použití jednotlivých heuristických strategií ve srovnání se situací, kdy žáci řešili úlohu přímým způsobem. Procenta jsou vztažena k počtu žáků, kteří daný způsob řešení použili. Připomeňme, že četnost užití jednotlivých způsobů řešení udávají tabulky 4 až 6.

Tab. 7: Úspěšnost použití jednotlivých heuristických strategií (v %)

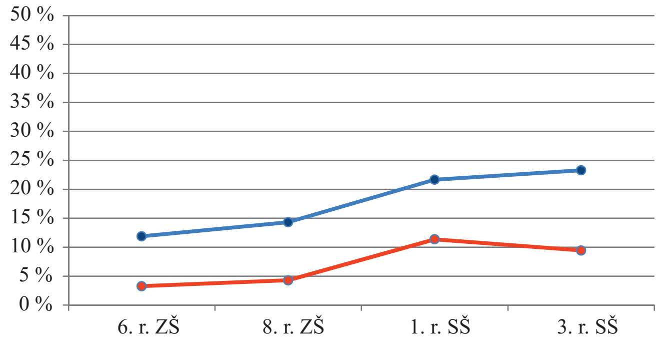
Úloha	Způsob řešení	6. ročník	8. ročník	I. ročník	III. ročník
Neznámé číslo	Přímý způsob	82	33	20	22
	Heur. strategie CZ	69	90	66	54
Šipka	Přímý způsob	76	41	52	49
	Heur. strategie ZPP	63	52	69	52
Součin	Heur. strategie POK	95	96	85	91
	Heur. strategie SE	100	100	67	0

Lze konstatovat, že úspěšnost užití strategií ZPP a POK se výrazně v závislosti na věku nemění. Úspěšnost užití strategie CZ na střední škole poklesla. Co se strategie SE týče, připomeňme, že četnost jejího užití je marginální (viz tab. 6).

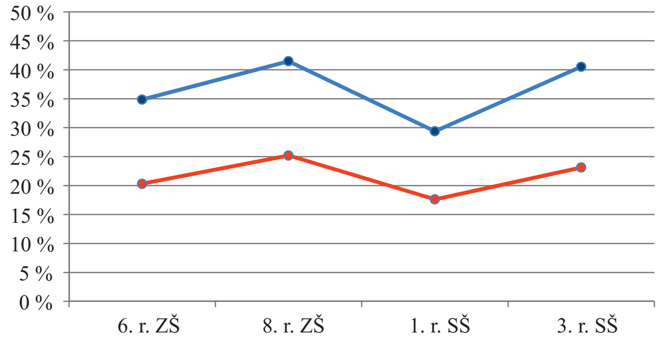
Srovnání úspěšnosti užití heuristické strategie a přímého způsobu řešení je možné pouze u úloh Šipka a Neznámé číslo. Zatímco u úlohy Šipka byli žáci od 8. ročníku výše mírně úspěšnější, jestliže použili heuristickou strategii ZPP, u úlohy Neznámé číslo je úspěšnost použití heuristické strategie CZ výrazně vyšší než při použití přímého způsobu (rozdíl v procentuální úspěšnosti je cca od 30 % do 60 % a hypotéza o rovnosti pravděpodobností jevu, že žák vyřeší úlohu úspěšně, se zamítá na hladině významnosti 1 %).

Zodpovězme nyní i čtvrtou výzkumnou otázku. Hypotéza H2 říká: Četnost případů, kdy žáci vůbec nezačnou úlohu řešit, bude s narůstajícím věkem řešitelů klesat.

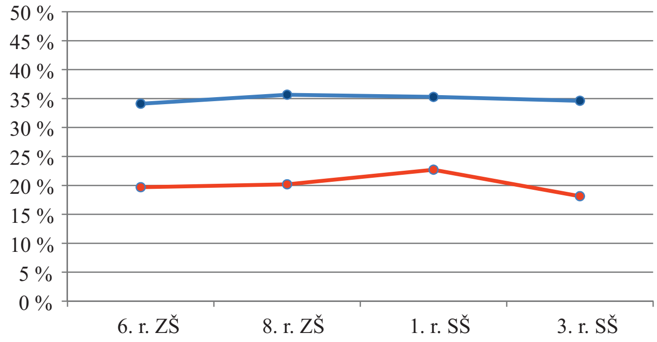
Z tabulek 4 až 6 je zřejmé, že hypotéza H2 se nepotvrdila. Následující grafy (viz obr. 7–9) popisující rozložení četnosti případů „prázdno“ ukazují pro každou úlohu 95% intervaly spolehlivosti pro každou věkovou kategorii.



Obr. 7: Neznámé číslo – 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost výskytu jevu „prázdno“



Obr. 8: Šipka – 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost výskytu jevu „prázdno"



Obr. 9: Součin – 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost výskytu jevu „prázdno"

V tabulce 4 je například uvedeno, že v úloze Neznámé číslo v 6. ročníku vůbec nezačalo úlohu řešit 7,6 % žáků z výběrového souboru 145 žáků. Z tohoto údaje byl vypočten 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost toho, že náhodně zvolený žák z celé populace žáků 6. ročníku (ze základního souboru) tuto úlohu nezačne řešit. Dolní mez tohoto intervalu spolehlivosti je 3,3 %, horní mez je 11,9 %. To lze interpretovat (s vysokou spolehlivostí 95 %) tak, že z celé populace žáků 6. ročníku je těch žáků, kteří tuto úlohu nezačnou řešit, přibližně 3 % až 12 %. Tyto dvě hodnoty jsou v grafu na obrázku 7 znázorněny dvěma levými krajními body spodní linie (dolní meze intervalů spolehlivosti pro jednotlivé ročníky) a horní linie (horní meze intervalů spolehlivosti pro jednotlivé ročníky). Podobně z hodnoty 16,4 % pro III. ročník je vypočten interval spolehlivosti 9,5 % až 23,3 %, tyto dva body pak jsou na obrázku 7 znázorněny jako pravé krajní body obou linií.

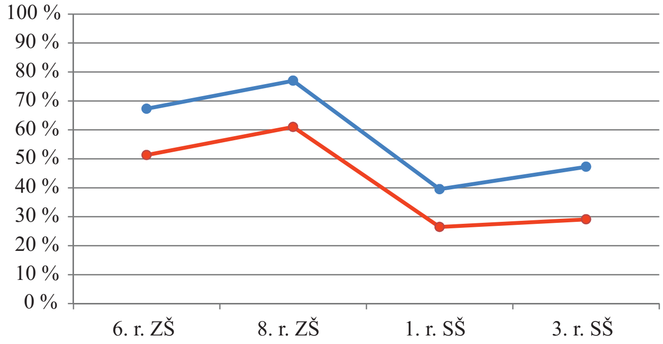
Relativní četnost případů „prázdno" neklesá s věkem řešitelů. Relativní četnost případů „prázdno" u úlohy Neznámé číslo má v závislosti na věku spíše rostoucí charakter. Odpověď na tento fakt prozatím nemáme. Vysvětlením by mohlo být, že žáci se s podobnými úlohami setkávají u rovnic, kde slouží jako procvičovací úlohy, proto nejsou jiné řešitelské strategie u těchto úloh podporovány učiteli ani učebnicemi. K přesnějšímu vymezení důvodů by mohly přispět rozhovory s žáky, které však do experimentu nebyly zařazeny. U zbývajících dvou úloh je relativní četnost případů „prázdno" vzhledem k věku zhruba konstantní – u úlohy Šipka kolísá kolem 30 %, u úlohy Součin kolísá mezi 20 % a 35 %.

Na závěr ještě vyhodnoťme hypotézu H3. Ta říká: Četnost úspěšně vyřešených úloh (jakýmkoli způsobem) bude s narůstajícím věkem řešitelů vzrůstat.

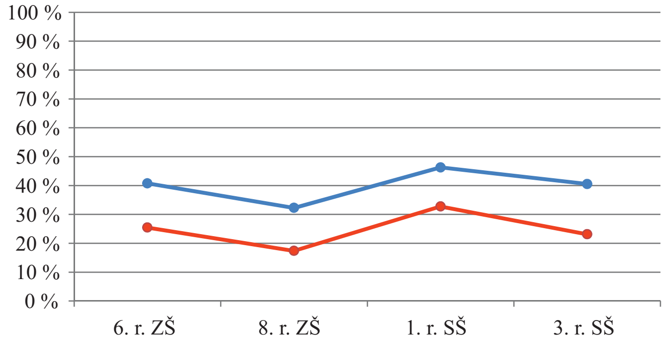
Tabulka 8 ukazuje relativní úspěšnosti řešení úloh v závislosti na věku u jednotlivých úloh, procenta jsou vždy vztažena k celkovému počtu žáků.

Tab. 8: Relativní úspěšnost řešení úloh v závislosti na věku (v %)

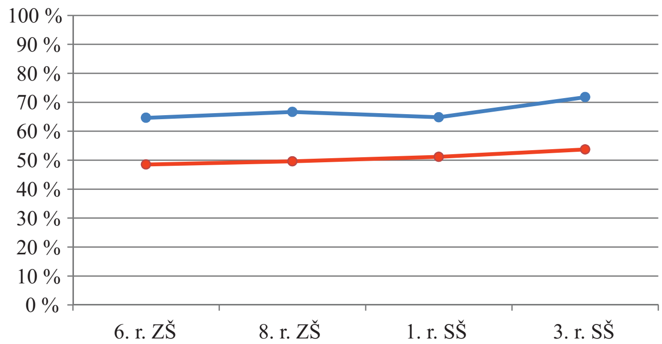
Úloha	6. ročník $n = 145$	8. ročník $n = 129$	I. ročník $n = 200$	III. ročník $n = 110$
Neznámé číslo	59,3	69,0	33,0	38,2
Šipka	33,1	24,8	39,5	31,8
Součin	56,6	58,1	58,0	62,7



Obr. 10: Neznámé číslo – 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost úspěšnosti při řešení úloh



Obr. 11: Šipka – 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost úspěšnosti při řešení úloh



Obr. 12: Součin – 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost úspěšnosti při řešení úloh

Je zřejmé, že hypotéza H3 se nepotvrdila. Následující grafy (viz obr. 10–12) ukazují pro každou úlohu 95% intervaly spolehlivosti pro každou věkovou kategorii.

Relativní četnost správných odpovědí nevzrůstá s věkem řešitelů. Relativní četnost správných odpovědí u dvou posledních úloh je vzhledem k věku zhruba konstantní – u úlohy Šipka kolísá kolem 32 % s odchylkou 7 %, u úlohy Součin kolísá kolem 60 % s odchylkou 3 %.

Zvláštní průběh má závislost relativní četnosti správných odpovědí na věku u první úlohy Neznámé číslo. Zde je úspěšnost řešení u žáků ZŠ mnohem vyšší (cca 65 %) než u žáků střední školy (cca 35 %), což v tomto případě nejen vyvrací platnost hypotézy H3, ale s vysokou spolehlivostí lze tvrdit, že u této úlohy došlo k významnému poklesu úspěšnosti. Rozbor výsledků ukazuje, že tento pokles byl způsoben pokusem žáků řešit tuto úlohu pomocí rovnic, při němž ale nebyli příliš úspěšní.

Všeobecně je přijímáno, že kromě vstřebávání celé řady poznatků a algoritmických dovedností při vyučování matematice je třeba velkou pozornost věnovat jejich tvořivému využívání jak v matematice, tak i mimo ni. Využívat matematiku znamená umět určit, kdy, kde a jak použít poznatky, které má žák při řešení úloh k dispozici (Novotná, 2004). Jedním ze způsobů, jak řešit úlohy, je využít heuristických strategií. V této souvislosti učitel čelí důležité otázce, zda jsou některé heuristické strategie žáky voleny spontánně. Novotná et al. (2006) uvádějí, že při přípravě výukových situací je pro učitele důležité rozmyslet si, jaké vědomosti a poznatky jsou pro užití dané heuristické strategie nezbytné a které z nich budou žáci schopni spontánně aplikovat.

Výzkumy věnované spontánnímu použití strategií při řešení úloh uvedené v 2.2 jsou zaměřeny vždy na žáky ve věku 9–12 let. Přitom se každý omezuje pouze na poměrně úzkou věkovou kategorii obvykle dvou, nejvýše tří let. Výsledky prezentované v tomto článku se týkají žáků od 12 do 19 let a umožňují tak porovnání podle věku žáků. Experiment ukázal, že věk žáků neovlivňuje významně spontánní použití heuristických strategií žáky. Významnou roli zde hrají znalosti z matematiky, které mají žáci k dispozici, a jejich vhodnost pro využití pro řešenou úlohu. Např. nástup řešení pomocí rovnic (případně jejich soustav) na střední škole vedl ke snížení počtu žáků, kteří využili některou heuristickou strategii u úlohy Součin.

Určitým omezením našeho výzkumu je množina předkládaných strategií. Při případné další studii by stálo za úvahu předložit žákům úlohy, které se dají efektivně řešit i některými dalšími heuristickými strategiemi a sledovat jejich případné spontánní využití žáky. V úvahu připadají např. strategie Analogie, Rozklad na jednodušší případy či Konkretizace a zobecnění. Dalším směrem navazujícího výzkumu by mohlo být též studium spontánního výskytu heuristických strategií při řešení úloh žáky mladšího školního věku.

6 Závěr

Provedený experiment ukázal, že existují heuristické strategie, které se mohou při řešení vybraného typu úloh u žáků objevit spontánně, a to nezávisle na jejich věku. Námi čtyři vytipované heuristické strategie POK, SE, ZPP a CZ byly žáky opravdu při řešení předložených úloh voleny, aniž by žáci byli předtím ve výuce s těmito strategiemi a s jejich použitím seznámeni. Nejčastěji volenou strategií v našem experimentu byla CZ. Dále lze konstatovat, že u strategií POK a ZPP se výrazně nemění četnost jejich použití v závislosti na věku. Strategie SE byla žáky k řešení využita pouze marginálně.

Z hlediska úspěšnosti použití jednotlivých strategií lze konstatovat, že ta se u strategií POK a ZPP v závislosti na věku více méně nemění.

Jak popisujeme v (Novotná, Eisenmann & Přibyl, 2015), žáci jsou schopni naučit se řešit úlohy pomocí vybraných heuristických strategií. Minimálně u strategií POK, ZPP a CZ může být tento fakt způsoben tím, že použití těchto strategií k řešení úloh není žákům cizí, což náš experiment prokázal. Řešení standardních úloh pomocí výše uvedených strategií by tak mohlo zlepšit schopnost žáků řešit úlohy a tím zlepšit i jejich postoj k řešení úloh a výuce matematiky obecně.

Poděkování

Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu GAČR č. 407/12/1939.

Literatura

Boček, L. et al. (1993–1999). *Matematika pro gymnázia.* Praha: Prometheus. Série učebnic pro gymnázia.

Břehovský, J., Eisenmann, P., Ondrušová, J., Přibyl, J. & Novotná, J. (2013). Heuristic strategies in problem solving of 11–12-year-old pupils. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of Symposium on Elementary Maths Teaching SEMT '13* (75–82). Praha: UK.

Cihlář, J. & Zelenka, M. (1998). *Matematika pro 8. ročník.* Praha: Pythagoras Publishing, a. s.

Eisenmann, P., Novotná, J. & Přibyl, J. (2015). The heuristic strategy Introduction of an auxiliary element. In D. Szarková, D. Richtáriková & Ľ. Balko (Eds.), *Proceedings of 14th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2015* (232–245). Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava.

Eisenmann, P., Novotná, J., Přibyl, J. & Břehovský, J. (2015). The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 535–562.

Eisenmann, P. & Přibyl, J. (2013). Systematické experimentování ve výuce matematiky. In *Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky* (85–93). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Hayes, J. R. (1981). *The Complete Problem Solver.* Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute.

van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A. & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematisc*, 84(3), 281–307.

Hintikka, J. & Remes, U. (1974). *The method of analysis: Its geometrical originand its general significance.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Ho, S. T. & Lowrie, T. (2014). The model Metod: Students' performance and its effectiveness. *The Journal of Matehematical Behavior*, 35, 87–100.

Iliada, E., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM The International journal on Mathematics Education*, 41(5), 605–618.

Ishida, J. (2002): Students' evaluation of their strategies when they find several solution methods. *The Journal of Matehematical Behavior*, 21(1), 49–56.

Jiang, Ch., Hwang, S. & Cai, J. (2014). Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving probléme about speed. *Educational Studies in Mathematics*, 87(1), 27–50.

Maláč, J. & Kurfürst, J. (1981). *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ.* Praha: SPN.

Molnár, J. et al. (1998–2001). *Matematika 6–9: Učebnice s komentářem pro učitele.* Olomouc: Prodos. Série učebnic pro základní školy.

Novotná, J. (2004). Matematické objevování založené na řešení úloh. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.), *25 kapitol z didaktiky matematiky* (357–366). Praha: PedF UK.

Novotná, J., Eisenmann, P. & Přibyl, J. (2015). Impact of heuristic strategies on pupils' attitudes to problem solving. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 8(1), 15–23.

Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H. & Krátká, M. (2006). Příprava a analýza didaktických situací. In Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu. Praha: JČMF.

Odvárko, O. et al. (1985–1988). *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť 1.–6. část.* Praha: SPN. Série učebnic pro střední odborné školy.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* Combinated edition. New York: John Wiley and Sons.

Pólya, G. (2004, 1. vydání 1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (Expanded princeton science library ed.).* Princeton: Princeton University Press.

Přibyl, J. & Eisenmann, P. (2014). Properties of problem solving strategies. In M. Houška, I. Krejčí & M. Flégl (Eds.), *Proceedings of efficiency and responsibility in education 2014* (623–630). Prague: Czech University of Life Sciences.

Přibyl, J. & Ondrušová, J. (2014). Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie. *Matematika, fyzika, informatika*, 23(2), 95–105.

Půlpán, Z. et al. (2007–2010). *Matematika 6–9.* Praha: SPN. Série učebnic pro základní školy.

Schoenfeld, A. H. (1982). *Expert and novice mathematical problem solving: Final project report and appendices B–H.* Clinton, N.Y.: Hamilton College, 1982.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (334–370). New York: Macmillan.

Petr Eisenmann, Petr.Eisenmann@ujep.cz
Jiří Přibyl, Jiri.Pribyl@ujep.cz
Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky
České mládeže 8, 400 96 Ústí nad Labem

Jarmila Novotná, Jarmila.Novotna@pedf.cuni.cz
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Magdalény Rettigové 4, 116 39 Praha 1

Jiří Břehovský, Jiri.Brehovsky@tul.cz
Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzitní nám. 1410/1, 460 01 Liberec 1

Jiří Cihlář, Jiri.Cihlar@ujep.cz
Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky
České mládeže 8, 400 96 Ústí nad Labem